تمرين:

ليكن التحويل a المعرف في $\{0,1,2,\dots,r,\dots,r+m-1\}$ كما يلي

$$a=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & r & \dots & r+m-2 & r+m-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r+1 & \dots & r+m-1 & r \end{pmatrix}$$

أثبت أن $\langle a\rangle$ تحتوي زمرة دائرية ذيلها r ودورها m

الحل:

نلاحظ أن $\langle a\rangle=\{a, a^2, \dots, a^n, \dots\}=\{a^n ; n\in N\}$ التي تحتوي زمرة دائرية مولدها a

$$a^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & r & \dots & r+m-2 & r+m-1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & r+2 & \dots & r & r+1 \end{pmatrix}$$

~~$a^{r+m}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & r & \dots & r+m-1 & r+m-2 \\ r+m & r+m+1 & r+m+2 & \dots \end{pmatrix}$~~

$$a^{r+m}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & r & \dots & r+m-1 & r+m-2 \\ r+m & r+m+1 & r+m+2 & \dots & 2r+m & \dots & 2(r+m)-2 & 2(r+m)-1 \end{pmatrix}$$

ولكن بالجزء نسب لدينا $r+m$ لأن آخر عنصر $r+m-1$ لذلك ~~…~~ ($r+m-1=r$ نعتبر واحد)

$$a^{r}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & r & \dots & r+m-2 & r+m-1 \\ r & r+1 & r+2 & \dots & 2r & \dots & 2r-2 & 2r-1 \end{pmatrix}$$

ومنه نستنتج أن $a^r=a^{r+m}$ أي أن $\langle a\rangle$ تحتوي زمرة دائرية دورها m وذيلها r

ملاحظة:

$\langle a\rangle$ تحتوي زمرة جزئية دائرية منتهية ذيلها r وعددها m فإن

$$K_a=\{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{r+m-1}\}$$

زمرة جزئية دائرية من $\langle a\rangle$ مرتبتها m

البرهان

مهما يكن العددان الطبيعيان u, v بحيث يكون $u\geq r$, $v\geq r$ فإننا نجد عددان طبيعيان

حيث يكون λ ، $u + v - r = \lambda m + \mu$ حيث $0 \leq \mu < m$ ، $\lambda \geq 0$

وبالتالي فإن

$$u + v = r + \lambda m + \mu \Rightarrow a^{u+v} = a^u . a^v = a^{r+\lambda m} . a^{\mu} = a^r . a^{\mu} = a^{r+\mu} \in K_a$$

(لأن $r+\mu < r+m$) أي أن K_a مغلقة وبالتالي فهي تشكل زمرة جزئية من $\langle a \rangle$

إن a^{km} هو عنصر حيادي في K_a لأنه $\forall a^u \in K_a$ فإنه يوجد $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ بحيث يكون $a^u = a^{r+i}$

$$a^u a^{km} = a^{r+i} a^{km} = a^{km+r} a^i = a^r a^i = a^{r+i} = a^u$$

$$a^{km} a^u = a^{km} . a^{r+i} = a^{km+r} . a^i = a^r a^i = a^{r+i} = a^u$$

$$\Rightarrow \forall a^u \in K_a ; a^u a^{km} = a^{km} a^u = a^u$$

ومن أجل $a^u \in K_a$ لنبحث عن $a^v \in K_a$ بحيث يكون

$$a^u . a^v = a^v . a^u = a^{km} \Rightarrow a^{u+v} = a^{km}$$

$$\Rightarrow u + v = km \Rightarrow v = km - u$$

$$\left. \begin{array}{l} a^u . a^v = a^u . a^{km-u} = a^{km} \\ a^v a^u = a^{km-u} a^u = a^{km} \end{array} \right\} \Rightarrow a^u a^{km-u} = a^{km-u} a^u = a^{km}$$

أي أنه لكل عنصر من K_a نظير وبالتالي فإن K_a زمرة جزئية دائرية من $\langle a \rangle$ مرتبتها m

الزمرة الجزئية العظمى:

لقد رأينا سابقاً أنه إذا كانت $\langle a \rangle$ غير منتهية فإنها لا تحوي عنصراً جامداً وبالتالي لا تحوي زمرة جزئية ولكن أي زمرة نصف S تحوي زمرة جزئية إذا وفقط إذا كانت تحوي عنصراً جامداً

الإثبات:

1- إذا كانت S تحوي عنصراً جامداً مثل a فإن $a^2 = a \Rightarrow \langle a \rangle = \{a\}$ تشكل زمرة دائرية دورها $m = 1$ ولذلك $r = 1$ حسب المبرهنة الأخيرة فإن $K_a = \{a\}$

تكون زمرة جزئية من S ؟

العكس:

إذا كانت S تحوي زمرة جزئية مثل G أي $G \subseteq S$ فإن G تملك عنصر محايد e ويكون $e^2=e$ وبالتالي S تملك عنصراً جامداً

تمرين :

1) إذا كان e عنصراً جامداً في نصف زمرة S فأثبت أن

1) $eS=\{a\in S ; ea=a\}$

2) $Se=\{a\in S ; ae=a\}$

3) $eSe=\{a\in S ; ea=ae=a\}$

4) $eSe=eS\cap Se$

الحل:

1) $\forall a\in eS \Rightarrow \exists x\in S ;\ a=ex \Rightarrow ea=e^2x=ex=a$

$\Rightarrow eS\subseteq \{a\in S ; ea=a\}$

العكس:

$b\in\{a\in S ; ea=a\} \Rightarrow eb=b\in eS \Rightarrow \{a\in S ; ea=a\}\subseteq eS$

ومن الاحتوائين ينتج المساواة

2) نفس الطريقة

3) $\forall a\in eSe \Rightarrow \begin{cases} a\in eS \Rightarrow ea=a \\ a\in Se \Rightarrow ae=a \end{cases} \Rightarrow ea=ae=a$

$\Rightarrow a\in\{a\in S ; ae=ea=a\} \Rightarrow eSe\subseteq\{a\in S ; ae=ea=a\}$

لدينا

$b\in\{a\in S ; ae=ea=a\} \Rightarrow be=eb=b \Rightarrow ebe=eb=b\in eSe$

$\Rightarrow b\in eSe$

$\Rightarrow \{a\in S ; ae=ea=a\}\subseteq eSe$

ومن الاحتوائين ينتج المساواة

(4) $a \in eSe \iff ae = ea = a \iff a \in eS$ و $a \in Se \iff a \in eS \cap Se$

مبرهنة:

لتكن e عنصراً جامداً في نصف زمرة S ولتكن H_e مجموعة جزئية من eSe تحوي كل عنصر من eSe يملك نظيراً في eSe بالنسبة إلى e فإن:

(1) H_e زمرة جزئية من S تحوي e

(2) H_e تحوي أي زمرة جزئية G من S تتقاطع مع H_e أي أن:

$G \cap H_e \neq \phi \Rightarrow G \subseteq H_e$

البرهان:

(1) إن eSe نصف زمرة جزئية من S والعنصر الحيادي e لأنه

$\forall a,b \in eSe ; \begin{cases} ea = ae = a \\ eb = be = b \end{cases} \Rightarrow abe = ab = eab \in$

$\Rightarrow ab \in eSe$

أي أن eSe مغلقة وبالتالي هي نصف زمرة جزئية في S

$\forall a \in eSe ; ae = ea = a \Rightarrow eSe$ ذو حيادي e

إذا كان $x,y \in eSe$ بحيث يكون $yx = e$ فإن $x,y \in H_e$ حسب تعريف

$e \in H_e$ لأنه يقبل النظير لنفسه

$u,v \in H_e \Rightarrow \exists u', v' \in H_e ; uu' = u'u = e \quad vv' = v'v = e$

$(uv)(v'u') = u(vv')u' = ueu' = uu' = e$

$(v'u')(uv) = v'(u'u)v = v'ev = v'v = e$ $\Rightarrow uv \in H_e$

أي أن H_e مغلقة فهي نصف زمرة جزئية من eSe أي أن H_e زمرة جزئية في S

(2) نفرض أن G زمرة جزئية من S بحيث أن $G \cap H_e \neq \phi$ ونفرض أن f حيادي في G ولتكن $a \in G \cap H_e$ ونظيره g في G و h نظير a في H_e فيكون

$e = ha = haf = ef = eag = ag = f$

بالتالي e حيادي في G زمرة: $\forall c \in G \Rightarrow c = ece \in eSe$

$\Rightarrow G \subseteq eSe$ حسب التعريف H_e $\Rightarrow G \subseteq H_e$